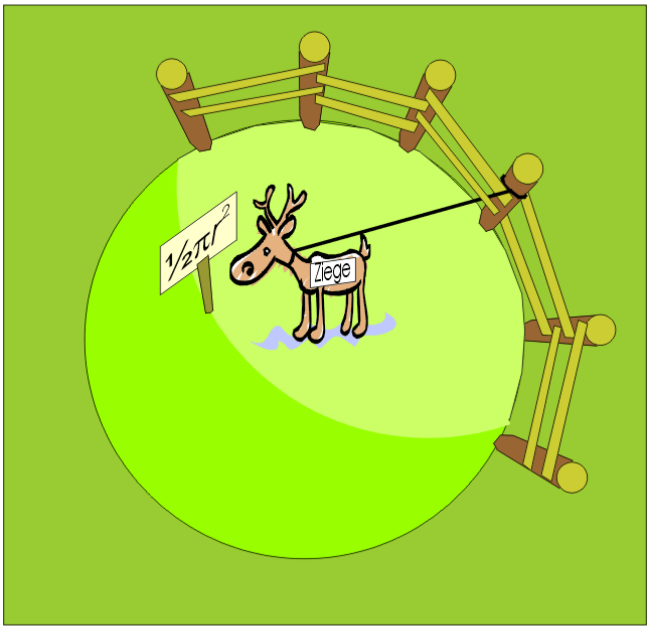
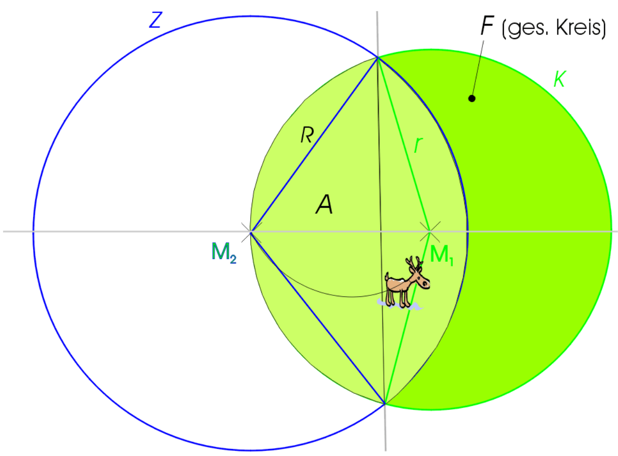
Das Ziegenproblem

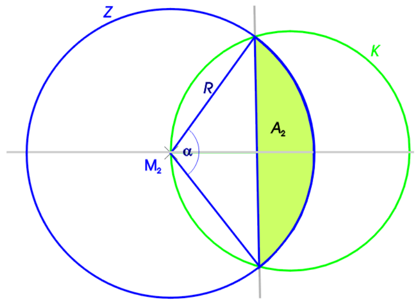
Ein Bauer besitzt eine Ziege und eine kreisförmige Wiese, auf der er diese Ziege weiden lassen möchte. Die Ziege wird mit einer Leine an einem senkrechten Pfahl festgebunden, der exakt auf dem Rand der Wiese steht. ***Welche Länge muss die Leine haben, damit die Ziege gerade die Hälfte der Fläche der kreisförmigen Wiese abgrasen kann***? (Die Ziege und der Pfahl sind als punktförmig anzusehen.)



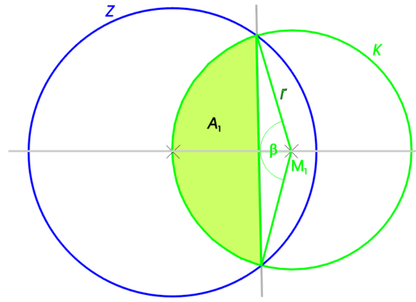


Die der Ziege zugängliche Fläche ist die **Schnittfläche *A*** zweier Kreise. Der **Kreis *K*** um M_1 mit Radius *r* beschreibe die Wiese. Der **Kreis *Z*** um den Mittelpunkt M_2 auf *K* beschreibt den Aktionsradius *R* der Ziege. *R* entspricht der gesuchten Länge der Leine. Die Fläche der Wiese (gesamter Kreis) beträgt $F = \pi \times r^2$. *R* muss so gewählt werden, dass gilt: $A = \frac{1}{2} F = \frac{1}{2} \pi \times r^2$.

Die Schnittfläche A ergibt sich als Summe der beiden **Teilflächen A_1** und **A_2**: $A = A_1 + A_2$. A_1 ist ein Segment des Kreises K, A_2 ein Segment des Kreises Z.



Entsprechend der Formel zur Berechnung der Fläche von Kreissegmenten gilt:

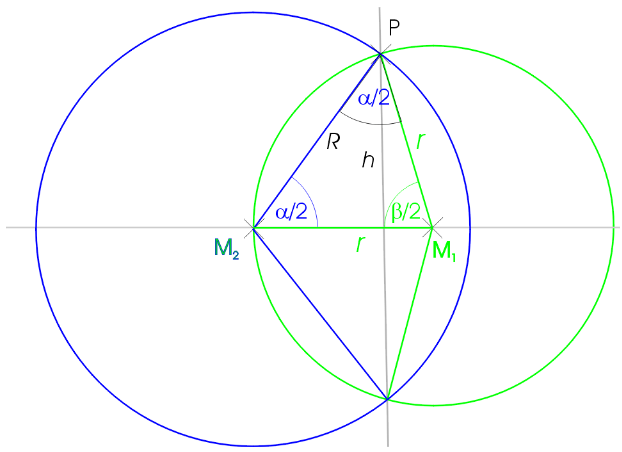


$$A_1 = \frac{r^2}{2}\left(\beta - \sin(\beta)\right)$$

$$A_2 = \frac{R^2}{2}\left(\alpha - \sin(\alpha)\right)$$

mit den jeweiligen Segmentwinkeln α und β im Bogenmaß(!).

Die Winkel M_1M_2P und M_2PM_1 im gleichschenkligen Dreieck M_2M_1P mit den Seiten R, r und r sind gleich und betragen jeweil die Hälfte des Segmentwinkels α . Daraus ergibt sich



$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°$ (Winkel in Grad)

bzw. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \pi$ (Winkel im Bogenmaß). Somit ist

$\beta = 2\pi - 2\alpha$ und $A_1 = \frac{r^2}{2}\left(2\pi - 2\alpha - \sin(2\pi - 2\alpha)\right)$.

Vereinfachung mit Hilfe der bekannten Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen ergibt:

$$A_1 = \frac{r^2}{2}\left(2\pi - 2\alpha - \sin(2\pi - 2\alpha)\right)$$

$$\sin(\varphi - \vartheta) = \sin\varphi\cos\vartheta - \cos\varphi\sin\vartheta$$

$$\sin(2\pi - 2\alpha) = \sin(2\pi)\cos(2\alpha) - \cos(2\pi)\sin(2\alpha)$$

$$\sin(2\pi - 2\alpha) = 0 \times \cos(2\alpha) - 1 \times \sin(2\alpha)$$

$$\sin(2\pi - 2\alpha) = -\sin(2\alpha)$$

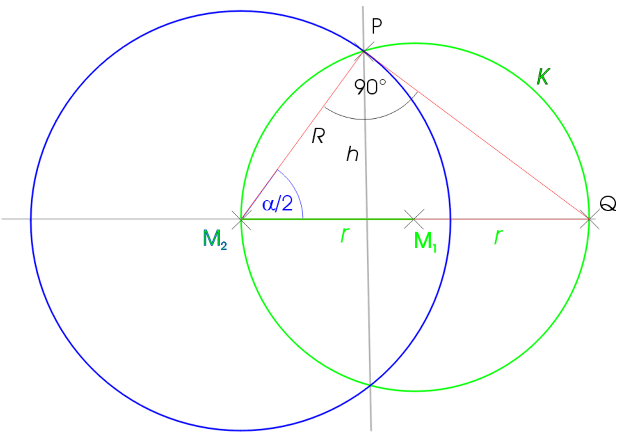
$$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\sin(2\pi - 2\alpha) = -2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$A_1 = \frac{r^2}{2}\left(2\pi - 2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

$$A_1 = r^2\left(\pi - \alpha + \sin\alpha\cos\alpha\right)$$

Das Dreieck M_2QP ist rechtwinklig (*K* ist Thaleskreis über M_2Q) mit der Hypotenuse $2r$ und der Ankathete R bzgl. $\alpha / 2$ bei M_2. Daraus folgt



$R = 2r \times \cos\dfrac{\alpha}{2}$. Einsetzen in

$A_2 = \dfrac{R^2}{2}\left(\alpha - \sin(\alpha)\right)$ führt zu

$A_2 = \dfrac{\left(2r\cos(\alpha/2)\right)^2}{2}\left(\alpha - \sin(\alpha)\right)$.

Mit dem bekannten Zusammenhang (Formelsammlung)

$\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\varphi}{2}}$ erhält man $A_2 = \dfrac{4r^2\,\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}{2}\left(\alpha - \sin(\alpha)\right) = r^2(1+\cos\alpha)(\alpha - \sin\alpha)$

$$A_2 = r^2\left(\alpha + \alpha\cos\alpha - \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\right)$$

die Flächenbedingung lautet damit:

$$\tfrac{1}{2}F = \tfrac{1}{2}\pi r^2 = A_1 + A_2 = r^2\left(\pi - \alpha + \sin\alpha\,\cos\alpha\right) + r^2\left(\alpha + \alpha\cos\alpha - \sin\alpha - \sin\alpha\,\cos\alpha\right) \qquad / \, r^2$$

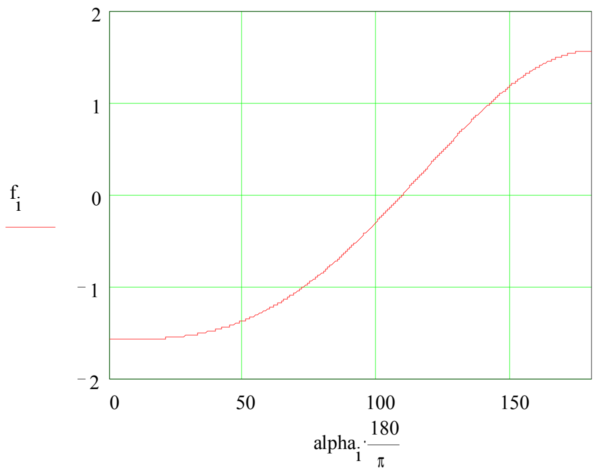
$$\frac{\pi}{2} = \pi - \alpha + \sin\alpha\,\cos\alpha + \alpha + \alpha\cos\alpha - \sin\alpha - \sin\alpha\,\cos\alpha \qquad -\pi/2; \times(-1)$$

$$0 = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \pi/2$$

Diese Gleichung ist meines Wissens nur näherungsweise lösbar. Interessant – aber bei genauerer Betrachtung einleuchtend – ist die Tatsache, dass es für das Problem eine eindeutige Lösung α^* gibt, die nicht vom Radius *r* der Wiese abhängt! Die Aufgabe ist also beliebig skalierbar. Ganz gleich, wie groß die Wiese ist, der Öffnungswinkel des Kreissegments A_2 ist konstant. Wegen $R = 2r \times \cos\frac{\alpha}{2}$ bedeutet das auch, dass die Länge *R* der Leine direkt proportional zum jeweiligen Radius *r* der Wiese ist: $R = 2\cos\frac{\alpha^*}{2} \times r$.

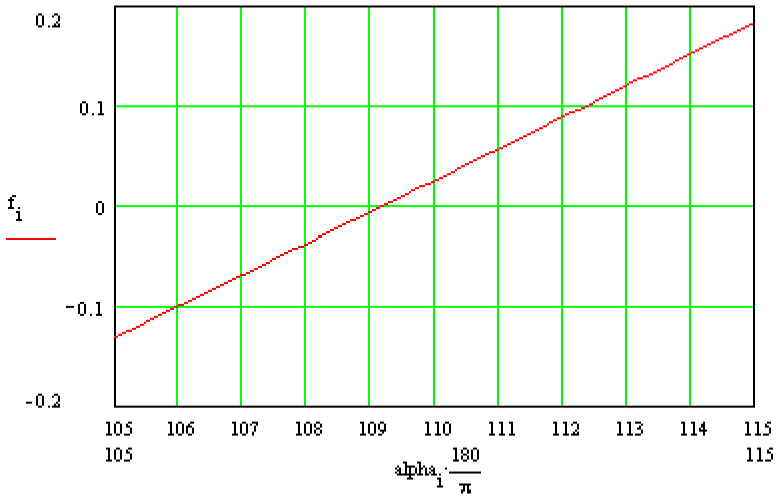
Eine numerische Lösung

Nachfolgend ist die Funktion $f(\alpha) = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \pi/2$ gegen den Winkel α (in Grad) aufgetragen.



Der Detailausschnitt erlaubt das Ablesen der Nullstelle bei $\alpha^* \approx 109{,}25°$ bzw.

$\alpha^* \approx 1{,}907$ (im Bogenmaß).



Mit $R = 2r \times \cos\frac{\alpha}{2} \approx r \times 2\cos\frac{1{,}907}{2}$ folgt: $\underline{R \approx 1{,}158r}$